

换到 Euler 观点, 可应用公式

$$v(t, g_t(x)) = \frac{dg}{dt}(t, x),$$

这里 v 是依赖时间的速度向量场, $g_t(x) = g(t, x)$ 是轨道族. 如果 v 是 C^1 光滑的, g_t 是微分同胚族, 这种方法奏效. 我们考察了 $T_t(x) := g_t(x)$, 即粒子的最优轨迹. 但是, 我们并不先验知道这些轨道是否定义了微分同胚族. 当传输代价为欧氏距离平方, μ 和 ν 满足合适条件时, 我们可以应用 Caffarelli 关于 Monge-Ampère 方程的正则性理论来保证 $\{g_t\}$ 是微分同胚族. Lagrange 方法经常由于激波现象而失效, 所谓激波就是不同的轨道相遇. 对于可压缩流体, 即便在光滑的初始条件下, 激波在有限时间内有可能出现. 但是在最优传输中, 激波不会出现. 假如传输代价是严格凸函数, 每条轨迹都是直线. 如果两个粒子 x_1, x_2 的轨迹在某个时刻 t 彼此相交, 它们在 $t + \varepsilon$ 时刻的位置为 y_1, y_2 , $\varepsilon > 0$, 那么由循环单调性, 我们得到矛盾. 因此, 可以假设 $\{g_t\}$ 是微分同胚族.

令 $(T_t)_{0 \leq t \leq 1}$ 是依赖时间的最优传输问题 (11.2) 的解, 考虑中间时刻的概率测度

$$\rho_t = (T_t)_\# \mu.$$

我们推导 (ρ_t) 的自然演化方程, 方程用速度场来表示.

定理 11.6 (线性传输方程的特征方法) 令 X 为 $\mathbb{R}^n$ 或者更一般的光滑完备流形. 设

$$(T_t)_{0 \leq t \leq T_*}, \quad T_0 = \text{id}$$

是 X 的局部 Lipschitz 微分同胚族. 设 $v = v(t, x)$ 是与轨迹 (T_t) 相联系的速度场. 设 μ 是 X 上的概率测度, $\rho_t = T_{t\#} \mu$. 那么, $\rho_t = \rho(t, \cdot)$ 是线性传输方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0, & 0 < t < T_*, \\ \rho_0 = \mu \end{cases} \quad (11.21)$$

的唯一解, 这里 ρ_t 在 $C([0, T_*]; \mathcal{P}(X))$ 中, 其中 $\mathcal{P}(X)$ 带有弱拓扑. ◆

当我们说 (T_t) 是一个局部 Lipschitz 微分同胚族, 是说对于所有 t ,