$i\in I$ 的分布函数 $C_{v,R}(u_1,\cdots,u_n)$ 为 Copula 函数，称为自由度为 v，协方差矩阵为 $\boldsymbol{R}$ 的 t 分布[①] Copula 函数。

t 分布 Copula 函数继承了正态 Copula 函数的几乎全部性质。但在正态 Copula 函数模型中，极端事件的发生总是彼此独立的，即 U_i 接近于 0 或 1 的可能性彼此独立。而在 t 分布 Copula 函数中，极端事件是相关的。

14.1.3.4 Archimedean Copula 函数

定义 6 Archimedean Copula 函数 $C:[0,1]^n\to[0,1]$ 可表述为如下形式：

$$C(\overline{x})=\phi^{[-1]}\left(\sum_{i=1}^{l}\phi(x_i)\right) \tag{14.7}$$

其中函数 $\phi:[0,1]\to\mathrm{IR}^+$，$\phi(1)=0$，$\phi(0)=\infty$，函数 ϕ 称为 Copula 函数的生成元。

生成元 ϕ 并非任意，必须满足 ϕ 的导数随维数 n 的增加而收敛。如果 $\phi^{[-1]}(\cdot)$ 是在任何维数 $n>0$ 下的可容许生成元，$\phi^{[-1]}(\cdot)$ 必须是一个 Laplace 变换。

定义 7 $\phi:[0,1]\to\mathrm{IR}^+$ 为严格递减凸函数，$\phi(1)=0$，则 ϕ 的反函数 $\phi^{[-1]}$ 定义为：

$$\phi^{[-1]}(s):=\begin{cases}\phi^{-1}(s), & 0\leqslant s<\phi(0)\\ 0, & \phi(0)\leqslant s\leqslant\infty\end{cases} \tag{14.8}$$

定义 8(Laplace 变换) Y 为非负随机变量，分布函数为 $G(y)$，密度函数 $g(y)$，则有：

(1) Y 的 Laplace 变换定义为：

$$L_Y(t):=E[\mathrm{e}^{-tY}]=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ty}\mathrm{d}G(y)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ty}g(y)\mathrm{d}y=:L_g(t),\quad \forall t\geqslant 0 \tag{14.9}$$

(2) 令 $\varphi:\mathrm{IR}^+\to[0,1]$，若解存在，$\varphi$ 的 Laplace 逆变换 L_φ^{-1} 定义为函数 $\chi:\mathrm{IR}^+\to[0,1]$ 满足：

$$L_\chi(t):=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ty}\chi(y)\mathrm{d}y=\varphi(t),\quad \forall t\geqslant 0 \tag{14.10}$$

(3) Y 的分布由 Laplace 变换唯一确定。

下面给出几种不同生成元 ϕ 的 Copula 函数：

定义 9 (1) Clayton Copula：

$$\phi(t)=(t^{-\theta}-1),\quad \phi^{[-1]}(s)=(1+s)^{-\frac{1}{\theta}},\quad \theta\geqslant 0 \tag{14.11}$$

(2) Gumbel Copula：

$$\phi(t)=(-\ln t)^\theta,\quad \phi^{[-1]}(s)=\mathrm{e}^{-s^{\frac{1}{\theta}}},\quad \theta\geqslant 1 \tag{14.12}$$

(3) Frank Copula：

$$\phi(t)=-\ln\frac{\mathrm{e}^{-\theta t}-1}{\mathrm{e}^{-\theta}-1} \tag{14.13}$$

$$\phi^{[-1]}(s)=-\frac{1}{\theta}\ln[1-\mathrm{e}^{-s}(1-\mathrm{e}^{-\theta})],\quad \theta\in\mathrm{IR}\backslash\{0\} \tag{14.14}$$

---

① t 分布：设 X,Y 独立，$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，则随机变量 $T=X\Big/\sqrt{\frac{Y}{n}}$ 服从自由度为 n 的 t 分布，记作 $T\sim t(n)$。

t 分布概率密度：$f(x)=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\Gamma(n/2)}\left(1+\dfrac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$。

t 分布主要性质：$E(T)=0$，$D(T)=\dfrac{n}{n-2}$，$n>2$。

14.1.4　运用 Copula 函数的相关性度量

运用 Copula 函数能对非线性相关性进行度量，其思想主要是度量变量的一致性，其中常用的度量指标为 Kendall's tau 和 Spearman's rho。

下面先对二元情况进行讨论。

定义 10(一致性)　令$(x_i,y_i),(x_j,y_j)$为向量(X,Y)的两组观测。若$(x_i-x_j)(y_i-y_j)>0$，则称(x_i,y_i)与(x_j,y_j)一致。若$(x_i-x_j)(y_i-y_j)<0$，则称为不一致。

14.1.4.1　Kendall's tau

Kendall's tau 根据一致性定义如下：

定义 11　令$\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)\}$为连续随机变量$(X,Y)$的 n 组观测的随机样本，则有$\binom{n}{2}$对不同的$\{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\}$数组对。设 c 表示一致的数组对对数，d 表示不一致的数组对对数，则 $c+d=\binom{n}{2}$。Kendall's tau 定义为：

$$t=\frac{c-d}{c+d}=(c-d)\Big/\binom{n}{2} \tag{14.15}$$

根据上述定义，t 即为数组对$\{(x_i,y_i),(x_j,y_j)\}$一致与不一致的概率之差。

将 Kendall's tau 引入 Copula 函数。

定理 4　连续随机变量(X,Y)，其 Copula 函数为 C，则 X,Y 的 Kendall's tau 为：

$$\tau_{X,Y}=\tau_C=4\iint_{[0,1]^2}C(u,v)\mathrm{d}C(u,v)-1 \tag{14.16}$$

若 U,V 为$[0,1]$上均匀分布的随机变量，其联合分布函数恰为 C，则：

$$\tau_{X,Y}=4\iint_{[0,1]^2}C(u,v)\mathrm{d}C(u,v)-1=4E[C(U,V)]-1 \tag{14.17}$$

下面讨论如何计算 Kendall's tau：

$$\begin{aligned}\iint_{[0,1]^2}C(u,v)\mathrm{d}C(u,v)&=\int_0^1\int_0^1 C(u,v)\frac{\partial^2C(u,v)}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_0^1\left(\int_0^1 C(u,v)\frac{\partial^2C(u,v)}{\partial u\partial v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\\&=\int_0^1\left(C(u,v)\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\Big|_{u=0}^{u=1}-\int_0^1\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\\&=\int_0^1\left(v-\int_0^1\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}-\int_0^1\int_0^1\frac{\partial C(u,v)}{\partial u}\frac{\partial C(u,v)}{\partial v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{14.18}$$

根据上述计算，给出几种 Copula 函数的 Kendall's tau 如下：

(1) 乘积 Copula 函数 $C(u,v)=uv$：

$$\tau_C=4\iint_{[0,1]^2}uv\mathrm{d}(uv)-1=0 \tag{14.19}$$